

ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ I

23 Σεπτεμβρίου 2022

Θέμα 1. [0.5+1+0.5+1=3]

- (α') Εξηγήστε γιατί $\text{Arg } z = \text{Arg } (z/|z|)$ για $z \in \mathbb{C}^*$.
- (β') Θεωρώντας τις ιδιότητες των εμπλεκόμενων πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής γνωστές, δείξτε λεπτομερώς ότι η απεικόνιση

$$\log : \mathbb{C}^* \rightarrow \Lambda := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im } z \leq \pi\}$$

είναι 1-1 και επί.

- (γ') Δώστε όλα τα στοιχεία του συνόλου $\Sigma := \log^{-1}(\Lambda \setminus \text{int } \Lambda)$ σε αλγεβρική μορφή.

- (δ') Για κάθε $z_0 \in \Sigma$ βρείτε τα όρια $\lim_{k \rightarrow \infty} \log \left(z_0 + \frac{i}{2 \log k} \right)$ και $\lim_{k \rightarrow \infty} \log \left(z_0 - \frac{i}{3e^k} \right)$.

Θέμα 2. [1+0.5=1.5]

Έστω το σύνολο

$$S_k := \left\{ z \in \mathbb{C}^* : -\pi + \frac{1}{k} \leq \text{Arg } z \leq \pi - \frac{1}{k} \right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

και η απλή καμπύλη $C_k := \partial D(0, 1) \cap S_k$ με αρχή το $a_k := e^{i(-\pi + \frac{1}{k})}$ και τέλος το $b_k := e^{i(\pi - \frac{1}{k})}$.

- (α') Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I_k := \int_{C_k} \log z \, dz$.

- (β') Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k$.

Θέμα 3. [1.5+2=3.5]

- (α') Δώστε τον ορισμό ενός αστερόμορφου συνόλου και δείξτε αναλυτικά ότι το $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ είναι αστερόμορφο.

- (β') Διατυπώστε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας και αποδείξτε το με χρήση του Θεωρήματος του Liouville.

Θέμα 4. [0.5+0.5+1=2]

Έστω g ακέραια και $I_r := \int_{\partial D(0,r)} \frac{g(z)}{z^2 - i} \, dz$ για $r \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

- (α') Γράψτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^2 = i$ σε αλγεβρική μορφή.

- (β') Υπολογίστε το όριο $I_0 := \lim_{r \rightarrow 0^+} I_r$.

- (γ') Υπολογίστε το όριο $I_\infty := \lim_{r \rightarrow +\infty} I_r$.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες. ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΤΕ ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!